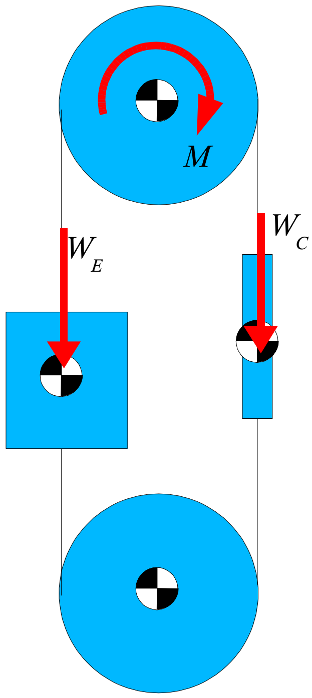
Problema 18.19 Hibbeler

Planteamiento

Resolveremos este problema usando el teorema del trabajo y la energia, para ello calcularemos el trabajo de todas las fuerzas activas que aparecen en el siguiente diagrama del sistema:



Trabajo del peso:

$$U_{peso} = mg\Delta h = 1800\text{kg}(9.81\text{m/s}^2)(-12\text{m}) = -2.12\times10^5\,\text{J}$$

En el caso del contrapeso:

$$U_{peso} = mg\Delta h = 2300\text{kg}(9.81\text{m/s}^2)(12\text{m}) = 2.71\times10^5\,\text{J}$$

Para calcular el trabajo del momento, determinamos primero el ángulo girado por la polea en radianes:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{12\text{m}}{0.35\text{m}} = 34.3\text{rad}$$

Como el momento es variable, el calculo del trabajo se hace mediante la siguiente integral:

$$U_{par} = \int_0^\theta M d\theta = \int_0^\theta \left(0.06\theta^2 + 7.5\right) d\theta = 0.02\theta^3 + 7.5\theta$$

$$U_{par} = 0.02(34.3)^3 + 7.5(34.3) = 1.064\times10^3\,\text{J}$$

El trabajo neto sera entonces:

$$U_{Neto} = -2.12\times10^5\,\text{J} + 2.71\times10^5\,\text{J} + 1.064\times10^3\,\text{J} = 5.99\times10^4\,\text{J}$$

Esta energía deberá transformarse en energía cinética del sistema. Estableceremos una expresión para ella:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}(m_E + m_C)v_E^2 + 2\frac{1}{2}(m_P)k^2\omega_P^2$$

Teniendo en cuenta la relación cinemática entre las velocidades:

$$\Delta T = \frac{1}{2}(m_E + m_C)v_E^2 + 2\frac{1}{2}(m_P)k^2\frac{v_E^2}{r^2} = \frac{1}{2}\left(m_E + m_C + 2m_P\frac{k^2}{r^2}\right)v_E^2 = \frac{1}{2}(4198\text{kg})v_E^2$$

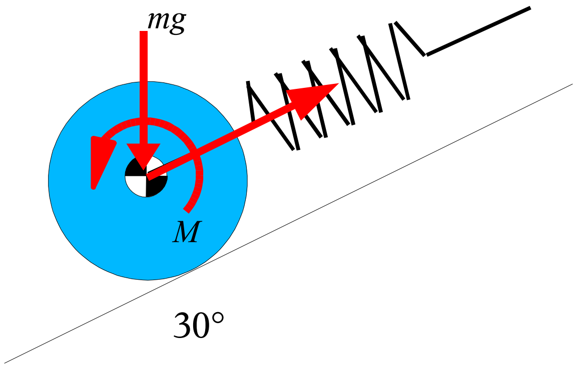
Donde lo que se encuentra entre paréntesis se conoce como la masa reducida del sistema.

Despejando para v tenemos $v_E = \sqrt{\frac{2U_{Neto}}{m_R}} = \sqrt{\frac{2(5.99\times10^4\,\text{Nm})}{4198\text{kg}}} = 5.34\text{m/s}$

Problema 18.23 Hibbeler

Planteamiento
Resolveremos este problema usando el teorema del trabajo y la energía, para ello calcularemos el trabajo de todas las fuerzas activas que aparecen en el siguiente diagrama del sistema:

Asumamos que el bloque se detiene tras haber recorrido su centro de masa una distancia *S*.
Con base en eso evaluamos el trabajo de las diferentes fuerzas activas.



Trabajo del peso:

$$U_{peso} = mg\Delta h = mgs\sin 30$$

Trabajo del par:

$$U_M = M\theta = M\frac{s}{r}$$

Para calcular el trabajo del resorte es necesario conocer su deformación inicial. Esto lo podemos hacer con un sencillo análisis estático.

$$k\delta_0 = mg\sin 30 \Rightarrow \delta_0 = \frac{mg\sin 30}{k}$$

Por lo tanto el trabajo sera:

$$U_{resorte} = \frac{1}{2}k\delta_0^2 - \frac{1}{2}k\delta_1^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg\sin 30}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg\sin 30}{k} + s\right)^2$$

Como es sistema parte y termina en reposo el cambio de la energía cinética es cero, por lo cual al evaluar el teorema del trabajo y la energía obtenemos una ecuación de segundo grado con variable s.

$$U_{Neto} = 0$$

$$mgs\sin 30 + M\frac{s}{r} + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg\sin 30}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg\sin 30}{k} + s\right)^2 = 0$$

$$\frac{mgs}{2} + M\frac{s}{r} + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\left(\frac{mg2}{2k}\right)^2 + \frac{mgs}{k} + s^2\right) = 0$$

$$\frac{mgs}{2} + M\frac{s}{r} - \frac{mgs}{2} - \frac{1}{2}ks^2 = 0 \Rightarrow M\frac{s}{r} = \frac{1}{2}ks^2 \Rightarrow s = \frac{2M}{kr}$$

Reemplazando valores: $s = \dfrac{2M}{kr} = \dfrac{2(30\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})}{(150\mathrm{N/m})(0.2\mathrm{m})} = 2.00\mathrm{m}$