Dinamica
Curso de Verano 2005
Cinematica de Cuerpos Rigidos
Cinetica 2 Ley de Newton

ITESM

Campus Monterrey

Departamento de Ingenieria Mecanica

Documento preparado por:

Ing. Jovanny Pacheco B

jpacheco2002@gmail.com

Objetivos del Tema

- Conocer y aplicar la 2 Ley de Newton al movimiento del centro de masa de un cuerpo rígido
- Comprender el concepto de cantidad de movimiento angular y su forma particular para un cuerpo rigido.
- Entender la relación entre los momentos externos que actúan en un cuerpo rígido y la cantidad de movimiento angular de este.

Ecuaciones de movimiento

- Relacionan los agentes que propician el movimiento (Fuerzas) con las variables cinemáticas

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$

$$\sum \mathbf{M}_G = \frac{d\mathbf{H}_G}{dt}$$

Ejemplo de ecuaciones de movimiento de la mecánica Newtoniana

Conceptos: Centro de Masa

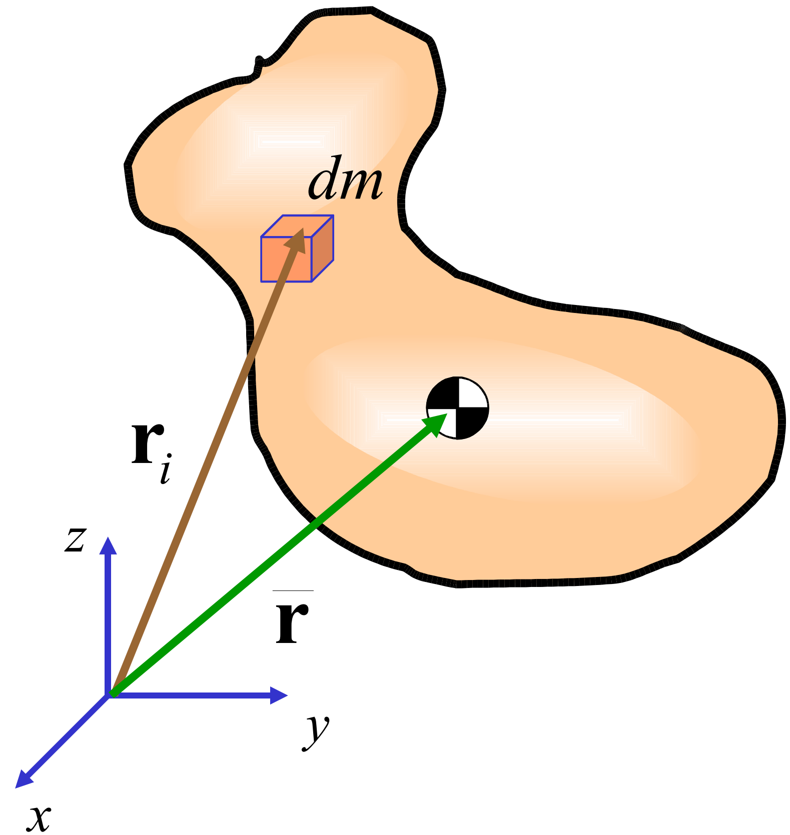
- Para un sistema Continuo

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{\int dm}$$

$$\bar{\mathbf{r}} \int dm = \int \mathbf{r}\, dm$$

- Si el SC está en el origen

$$\int \mathbf{r}\, dm = 0$$



Movimiento del Centro de Masa

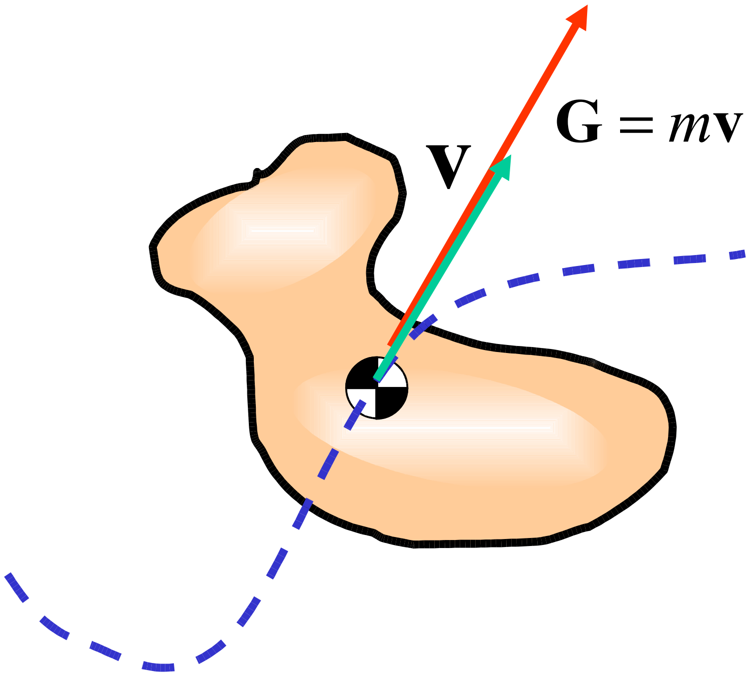
- Segunda Ley de Newton:
- Establece que el resultado de aplicar un sistema de fuerzas no balanceadas sobre un cuerpo es un cambio en la cantidad de movimiento lineal de éste. Esto puede expresarse de manera muy simple como:

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt}}$$

Esta es ecuación es el pilar de la Mecánica Newtoniana

Conceptos: Cantidad de Movimiento lineal

$$\mathbf{G} = m\mathbf{v}$$



También es conocida como:

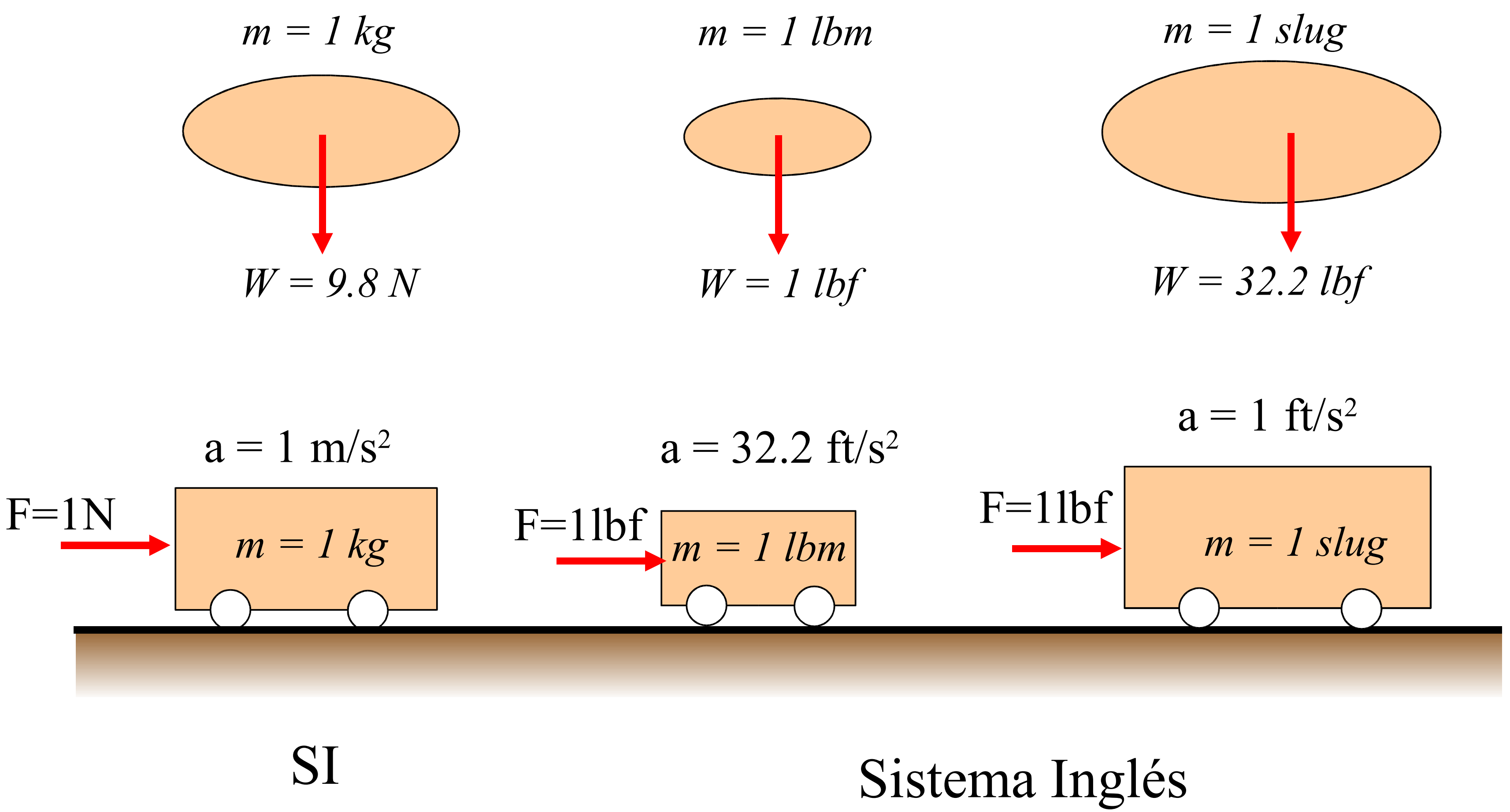
Momento lineal*

Momentum lineal

O Impetu

Representa la tendencia de un cuerpo a no dejarse afectar por otros

Sistemas de unidades:



Ecuación de momentos

$$\boxed{\sum \mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}}$$

Lo cual establece que el momento resultante de las fuerzas externas actuantes sobre un cuerpo respecto a un punto fijo O, produce un cambio en la cantidad de movimiento angular respecto a dicho punto.

Ecuación para el movimiento angular

- Ecuaciones generales de movimiento angular

Momentos respecto a un punto inercial *O*.

$$\sum \mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}$$

Momentos respecto al centro de masa

$$\sum \mathbf{M}_G = \frac{d\mathbf{H}_G}{dt}$$

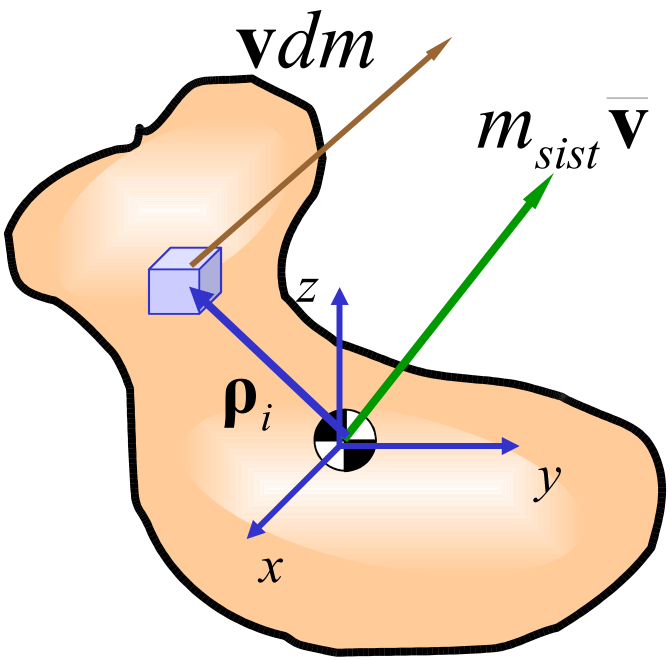
Momentos respecto a un punto no-inercial *P*.

$$\sum \mathbf{M}_P = \vec{\rho} \times m\bar{\mathbf{a}} + \frac{d\mathbf{H}_G}{dt}$$

Concepto: Cantidad de Movimiento Angular

- Para un cuerpo rígido

$$\boxed{\mathbf{H}_G = \sum\left(\vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i\right)}$$



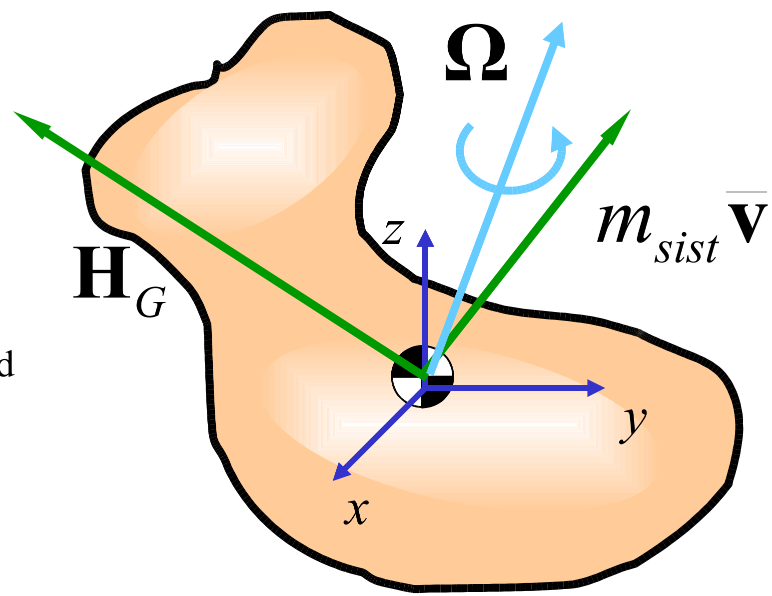
Es la sumatoria de la cant de movimiento angular de cada elemendo de masa del cuerpo rigido

$$\mathbf{H}_G = \int \vec{\rho} \times (\dot{\vec{\rho}}\, dm)$$

Concepto: Cantidad de Movimiento Angular

- Para un cuerpo rígido (2)

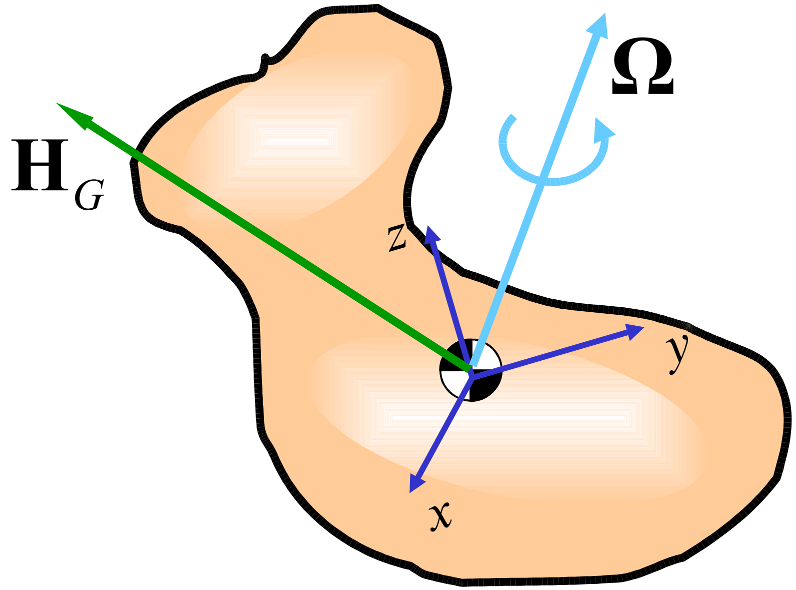
$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}}_{\text{Cantidad de movimiento Angular}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{Tensor de Inercia}} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}}_{\text{Velocidad Angular}}$$



$$\boxed{\mathbf{H}_G = [\mathbf{I}]\vec{\omega}}$$

Ecuación de Momentos en Cuerpos Rigidos

Como la cantidad de movimiento angular es una función vectorial, que puede expresarse en términos de la velocidad angular del cuerpo rígido y el Tensor de Inercia. Se escoge un sistema de coordenadas en movimiento con el objeto para que éste último no varíe



$$\sum \mathbf{M}_G = \frac{d\mathbf{H}_G}{dt} = \frac{d\mathbf{H}_G^F}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_G^F$$

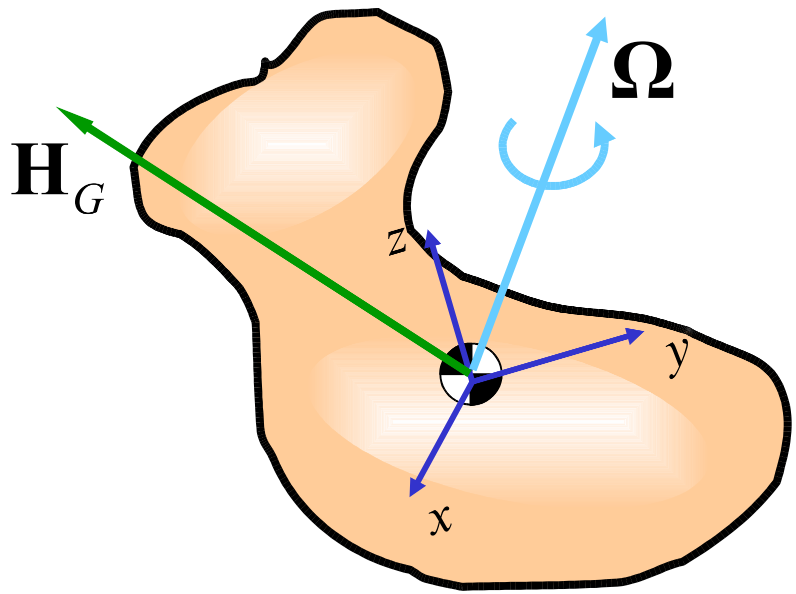
Ecuación de Momentos en Cuerpos Rigidos

Donde: $\mathbf{H}_G^F = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$

Tiene componenetes en el SCR solidario al cuerpo rigido.

Expandiendo el producto cruz:

$$\sum M_x = \dot{H}_x - H_y\omega_z + H_z\omega_y$$
$$\sum M_y = \dot{H}_y - H_z\omega_x + H_x\omega_z$$
$$\sum M_z = \dot{H}_z - H_x\omega_y + H_y\omega_x$$

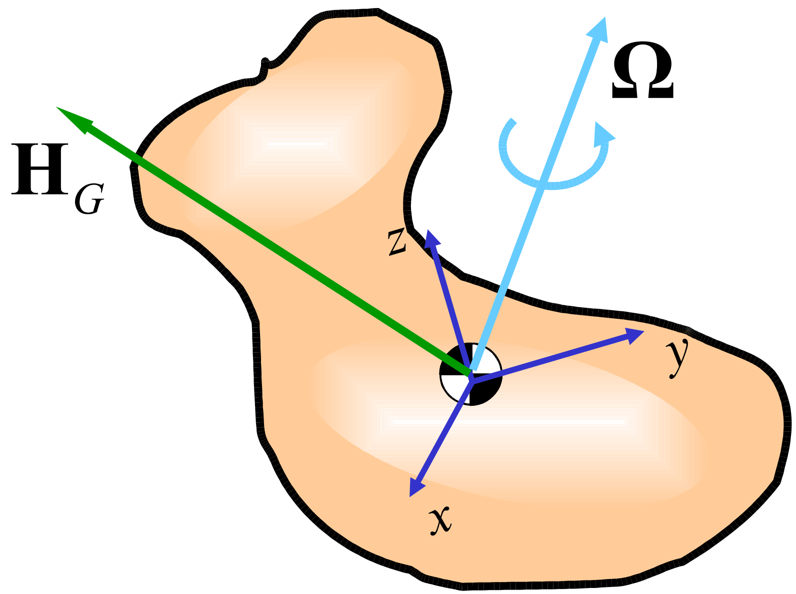


Ecuación de Momentos en Cuerpos Rigidos

Si se alinean los ejes de tal forma que coincidan con los ejes principales

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$H_x = I_{xx}\omega_x$$
$$H_y = I_{yy}\omega_y$$
$$H_z = I_{zz}\omega_z$$



Ecuación de Momentos en Cuerpos Rigidos

Reemplazando estos resultados se obienen las ecuaciones de Euler.

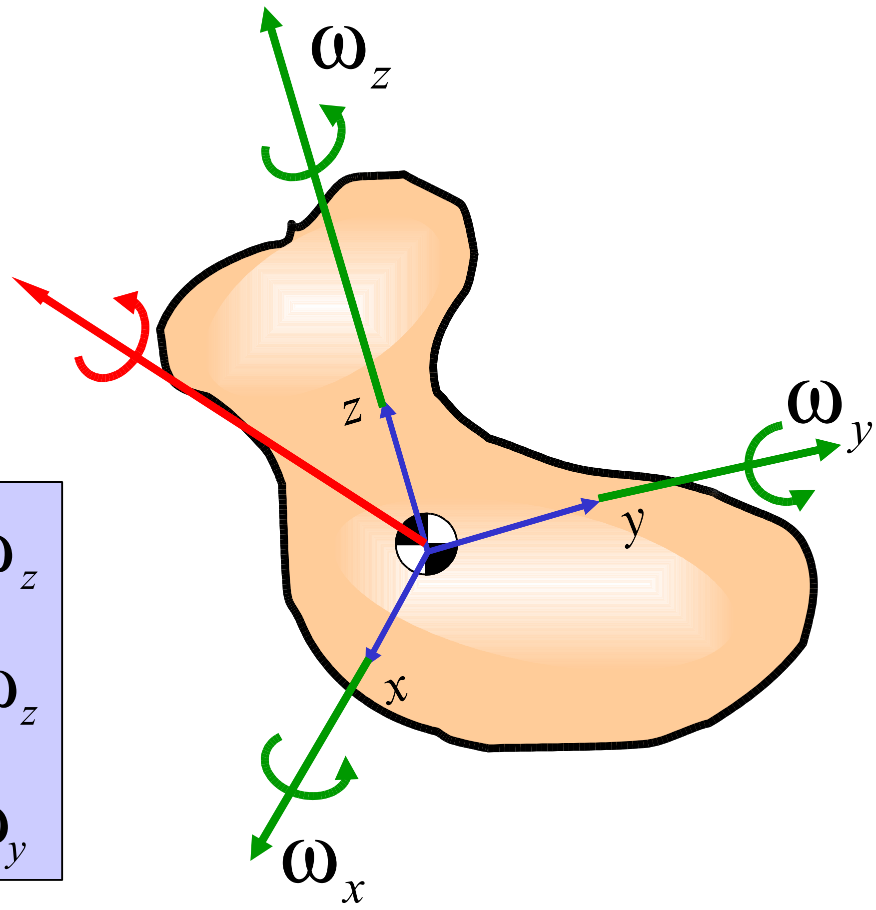
La ecuacion utilizada en el

movimiento tridimensional

$$\sum M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - \left(I_{yy} - I_{zz}\right)\omega_y\omega_z$$

$$\sum M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y - \left(I_{zz} - I_{xx}\right)\omega_x\omega_z$$

$$\sum M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z - \left(I_{xx} - I_{yy}\right)\omega_x\omega_y$$

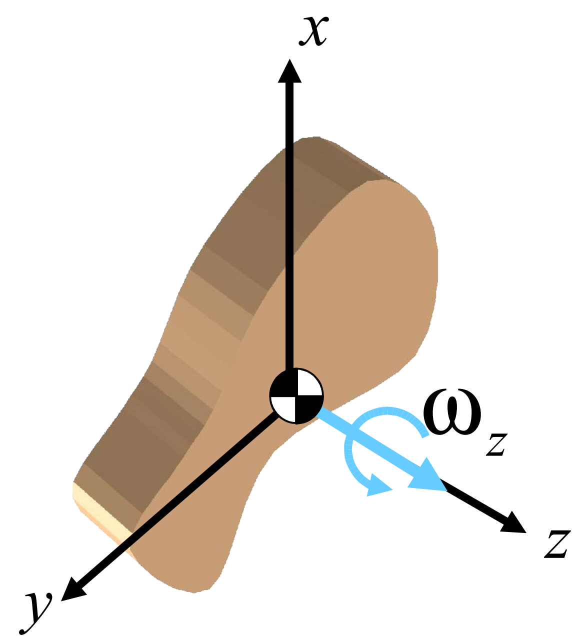


Ecuacion de Momentos para el plano

- Ecuación de momentos para un cuerpo en movimiento plano con simetría respecto a dicho plano

$$\boxed{\sum M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z = I_{zz}\alpha = \bar{I}\alpha}$$

Esta sumatoria de momentos se aplica en el centro de masa



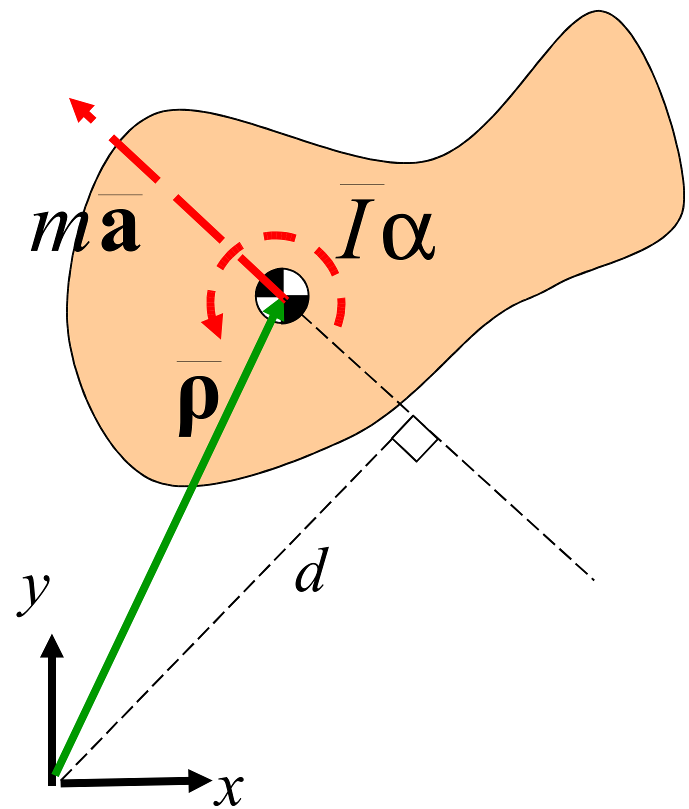
Ecuacion de Momentos para el plano (2)

- Ecuación de momentos en un cuerpo rígido para puntos diferentes a CM
  - Respecto un punto fijo cualquiera

$$\sum \mathbf{M}_P = \vec{\rho} \times m\bar{\mathbf{a}} + \frac{d\mathbf{H}_G}{dt}$$

$$\sum M_O = \bar{\rho} \times m\bar{a} + \bar{I}\alpha$$

$$\sum M_O = m\bar{a}d + \bar{I}\alpha$$



Ecuaciones de movimiento

- En conjunto la ecuación de fuerzas y de momentos permiten definir completamente el movimiento de una particula, sistema de partículas o cuerpo rígido en 3D

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

$$\sum \mathbf{M}_G = \frac{d\mathbf{H}_G}{dt}$$

Estas dos ecuaciones conforman la base de la mecánica Newtoniana

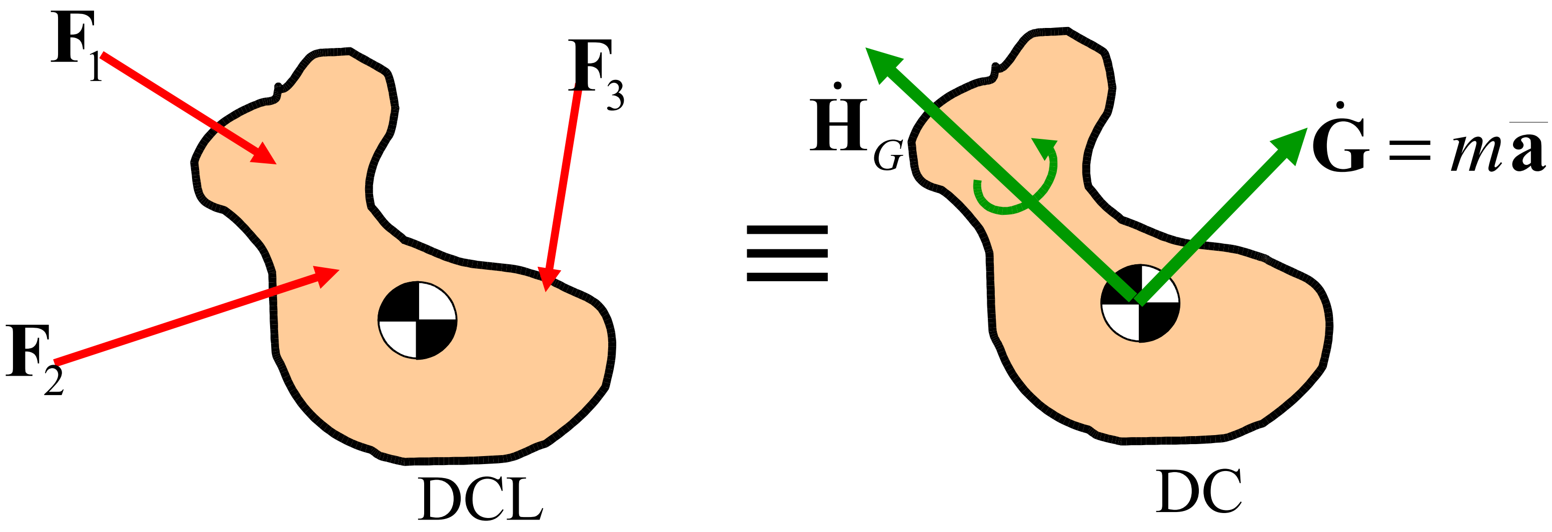
El problema de la Cinética

- Problema Inverso: Dada una variable cinemática (**r**,**v** o **a**) determinar una o más fuerzas que produzcan esa condición.
- Problema Directo: Dada una resultante de fuerzas (que puede ser función de una o más variables cinemáticas). Encontrar las funciones **r**,**v** o **a**. El resultado de éste último es genralmente una ecuación diferencial que puede no tener solución analítica

Pasos para la solución

- Establecer cual es el objeto u objetos de estudio. Esto permite definir que tipo de sistema utilizar
- Establecer el tipo de movimiento (Traslacion, rotacion, movimiento general) y si existen restricciones cinemáticas. A partir de éstas deben generarse ecuaciones adicionales.
- Dibujar los diagramas de cuerpo libre y diagramas cinéticos del sistema en estudio

Pasos para la solución



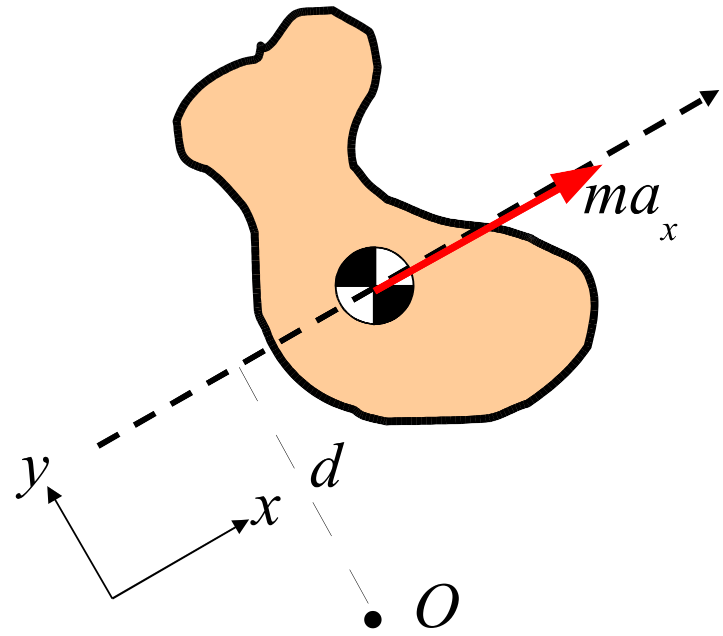
- Obtener a patir de estos diagramas y con la 2a Ley de Newton las ecuaciones que rigen el movimiento del cuerpo.
- Según se un problema inverso o directo, hallar las fuerzas incógnitas o resolver la ecuación diferencial para obtener el movimiento del cuerpo

Casos Particulares: Traslacion

- Ecuación para el movimiento del centro de masa siguiendo una trayectoria rectilinea

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_G = 0$$
$$\sum M_O = ma_x d$$

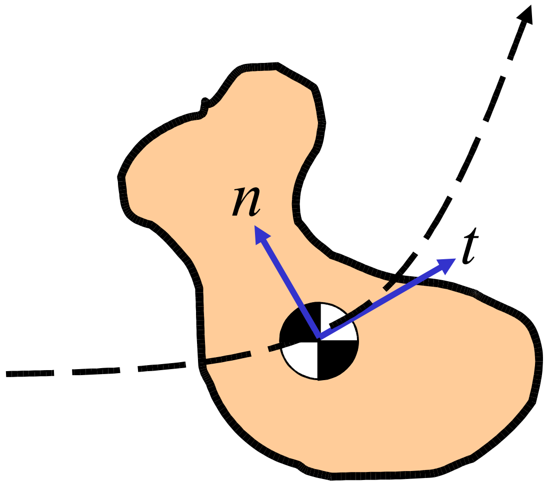


Casos Particulares: Traslacion

- Ecuación para el movimiento del centro de masa siguiendo una trayectoria curvilinea

$$\sum F_n = ma_n = m\frac{\left(v_G\right)^2}{\rho}$$

$$\sum F_y = ma_t = m\left(\dot{v}_G\right)$$



$$\sum M_G = 0$$

Casos Particulares: Rotacion Pura

- Normalmente se aplica solo la ec. De momentos

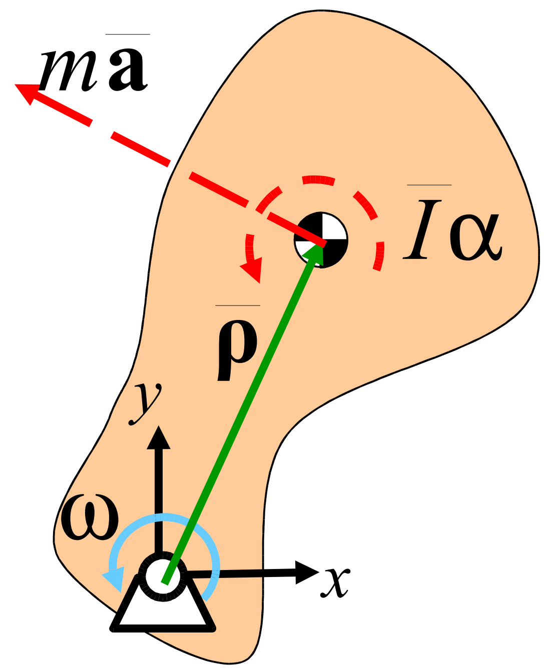
$$\sum \mathbf{M}_P = \vec{\rho} \times m\bar{\mathbf{a}} + \frac{d\mathbf{H}_G}{dt}$$

$$\sum M_O = \bar{\rho} m \bar{a} + \bar{I}\alpha$$

$$\sum M_O = \bar{\rho} m \left(\bar{\rho}\alpha \right) + \bar{I}\alpha$$

$$\sum M_O = m\bar{\rho}^2\alpha + \bar{I}\alpha$$

$$\boxed{\sum M_O = \bar{I}_O\alpha}$$



Casos Particulares: Rotacion Pura

- Centro de Percusion: Es el punto donde hay que aplicar las fuerzas externas tal que se minimizan la reacciones en O

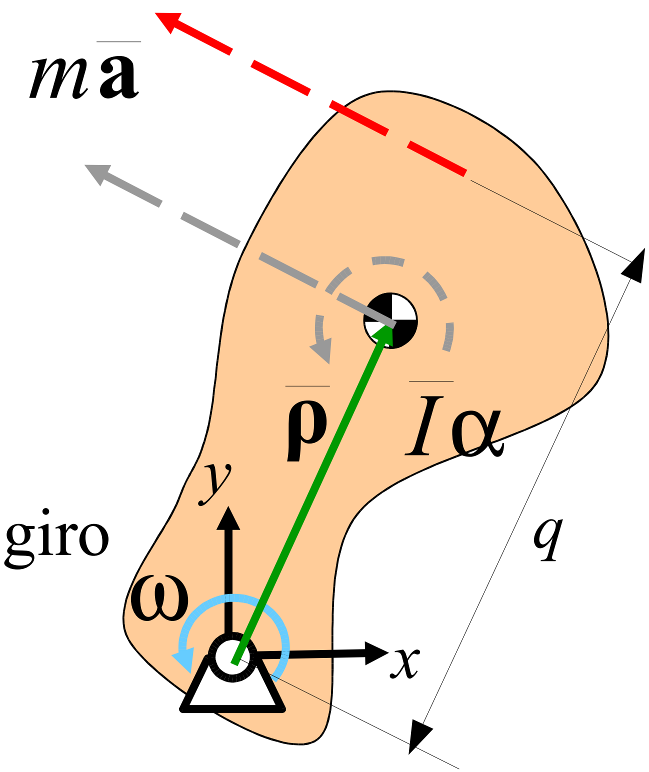
$$m\bar{a}(q-\bar{\rho}) = \bar{I}\alpha \quad \text{pero } \bar{a} = \alpha\bar{\rho}$$

$$m\alpha\bar{\rho}q - m\alpha\bar{\rho}^2 = \bar{I}\alpha$$

$$m\alpha\bar{\rho}q = \underbrace{\left(\bar{I} + m\bar{\rho}^2\right)}_{I_O}\alpha$$

$$\text{pero } I_O = mk^2, \text{donde } k \text{ es el radio de giro}$$

$$\boxed{q = k^2/\bar{\rho}}$$



Casos Particulares: Movimiento General

- Movimiento No restringido:
  - 3 Ecuaciones Independientes
- Movimiento Restringido:
  - 3 Ecuaciones de Movimiento No-independientes.
  - Completar con ecuaciones cinematicas provenientes de un análisis de aceleración