4. Movimiento Relativo: Sistemas de Coordenadas en Rotación (SCR)

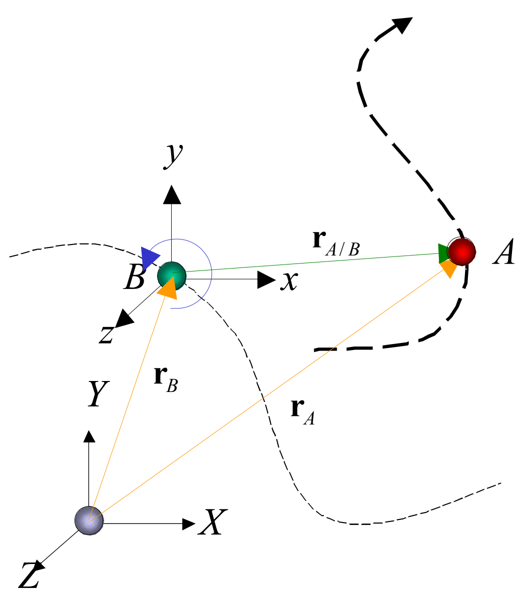
Ultima revisión 31/05/2005

En este documento se presentan la deducción de la ecuación general del movimiento relativo. La aplicación de esta ecuación permite "pegar" directamente el sistema de coordenadas en el cuerpo rígido lo que es extremadamente útil cuando se piensa en soluciones computacionales.

4.1. Sistemas de Coordenadas en Rotación

A continuación desarrollaremos una ecuación vectorial que nos permitirá relacionar variables cinemáticas medidas desde un sistema coordenado en movimiento de traslación y rotación respecto a un sistema "absoluto". Un sistema de coordenadas en rotación se caracteriza por que sus ejes cambian de orientación respecto a un sistema de referencia "absoluto" a diferencia de los Sistemas de Coordenadas en Traslación (SCT) vistos en la secciones 2 y 3

En la siguiente figura se aprecia una partícula A que se mueve siguiendo una trayectoria que podríamos llamar "absoluta" respecto a un observador en el sistema *XYZ*. A su vez el movimiento de esta partícula es seguido desde un observador en el sistema en movimiento *xyz*. Para expresar la posición de la partícula respecto a ambos sistemas se utilizan los vectores $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_{A/B}$ que expresan la posición "absoluta" de A y la relativa de A respecto al observador en B. De igual manera la posición del observador en B se mide respecto al sistema "absoluto" usando el vector $\mathbf{r}_B$. Es importante recordar que las cantidades vectoriales aquí mencionadas son funciones del tiempo y además se aprecia que cumplen la siguiente relación:



$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} \quad \textbf{[4.1]}$$

Donde

$$\mathbf{r}_{A/B} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \textbf{[4.2]}$$

Para hallar la relación de velocidades derivamos la ecuación 4.1, teniendo en cuenta que los vectores unitarios del sistema en rotación tienen derivadas diferentes de cero (Ver Apendice 1). Sus derivadas respecto al tiempo pueden representarse vectorialmente como:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \ \text{ y } \ \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \quad \textbf{[4.3]}$$

Por lo que la derivada de la ec. 4.1 queda

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \dot{x}\mathbf{i} + x\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + y\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \quad \textbf{[4.4]}$$

Reordenando las cantidades y agrupando las velocidades angulares obtenemos:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \quad \textbf{[4.5]}$$

Donde los dos último términos pueden interpretarse de la siguiente forma:

$\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$ Es la velocidad de *A* vista desde un observador que gira con el sistema de coordenadas. **Por lo tanto es la velocidad relativa respecto al marco de referencia en rotación.**

$\boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ **Es la velocidad de un punto sobre el marco de referencia en rotación que se encuentra ubicado en la posición de *A* en ese instante**. A este punto lo denominaremos *A'*.

La suma vectorial de las dos velocidades relativas es lo que visualiza un observador no-rotacional en B.

De esta forma la ecuación 4.5 puede rescribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \underbrace{\underbrace{\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}}_{\mathbf{v}_{A/A'}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})}_{\mathbf{v}_{A'/B}}}_{\mathbf{v}_{A/B}} \qquad \textbf{[4.6]}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/A'} + \mathbf{v}_{A'/B}$$

Los términos de la ecuación pueden reordenarse para colocarla en forma de cadena:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A/A'} + \mathbf{v}_{A'/B} + \mathbf{v}_B \qquad \textbf{[4.7]}$$

Para obtener una ecuación para las aceleraciones es necesario derivar la ec. 4.5 teniendo también en cuenta las derivadas de los vectores unitarios (Ver Apencice 1)

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \frac{d\dot{x}}{dt}\mathbf{i} + \dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{d\dot{y}}{dt}\mathbf{j} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \qquad \textbf{[4.8]}$$

Desarrollando las derivadas:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \ddot{x}\mathbf{i} + \dot{x}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \dot{y}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j} + \boldsymbol{\alpha}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \boldsymbol{\omega}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}))$$

Reordenando

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) + \boldsymbol{\alpha}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Teniendo en cuenta que el término $\boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j})$ aparece dos veces y es el que se conoce como aceleración de Coriolis*.

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \boldsymbol{\alpha}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + 2\boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) \qquad \textbf{[4.9]}$$

Lo que también puede relacionarse con el punto imaginario *A'* de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \underbrace{\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}}_{\mathbf{a}_{A/A'}} + \underbrace{\boldsymbol{\alpha}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})}_{\mathbf{a}_{A'/B}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j})}_{\mathbf{a}_{Coriolis}}$$

* En honor a Gustave Gaspard Coriolis (1792-1843) Ingeniero Francés quien fue el primero en mencionarla en el artículo "*Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*" escrito en 1835.

Por lo que la ecuación de aceleraciones relativas puede escribirse como:

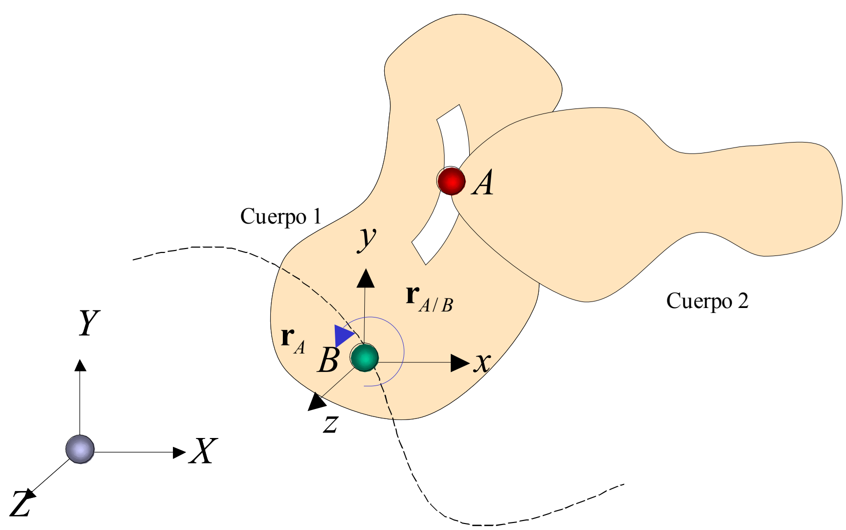
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{A/A'} + \mathbf{a}_{A'/B} + \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{Coriolis} \qquad \textbf{[4.10]}$$

4.2. Aplicación al movimiento de cuerpos rígidos.

Las ecuaciones 4.7 y 4.10 son fundamentales para el análisis de sistemas de cuerpos rígidos interconectados donde la unión entre dos pares de cuerpos se hace a través de un contacto deslizante, tal como un pasador en una ranura o un collarín en una barra. Para realizar el análisis deben seguirse los siguientes lineamientos.

- El sistema de coordenadas en rotación debe "pegarse" al cuerpo que posea una restricción geométrica que permita visualizar fácilmente las velocidades relativas.
- De esta manera el punto *A* será el punto de contacto en el otro cuerpo y el punto *A'* será el punto coincidente en el sistema de coordenadas. (En el primer cuerpo)

A partir de esto pueden escribirse las ecuaciones de movimiento relativo.



La determinación de $\mathbf{v}_{A/A'}$ y $\mathbf{a}_{A/A'}$ dependerá de la forma de la restricción geométrica. En el caso de la figura, la dirección de la tangente define la dirección de la velocidad relativa y la aceleración tangencial relativa. La dirección de la normal y el radio de curvatura de la ranura en el punto de contacto definen la componente normal de la aceleración.

Determinación de la dirección y magnitud de la Aceleración de Coriolis para sistemas de cuerpos rígidos en el plano

Aunque la aceleración de Coriolis puede obtenerse vectorialmente con la siguiente ecuación:

$$\mathbf{a}_{Coriolis} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A/A'} \qquad \textbf{[4.11]}$$

Para un sistema de cuerpos rígidos en el plano la magnitud de la aceleración está dada por:

$$a_{Coriolis} = 2\omega v_{A/A'} \qquad \textbf{[4.12]}$$

Y la dirección puede hallarse usando la regla de la mano derecha o usando una sencilla regla de dedos, que consiste en girar el vector velocidad relativa 90° en el sentido de rotación del sistema de coordenadas, como se muestra en la figura.