2. Movimiento Relativo: Sistemas de Coordenadas en Traslación (SCT)

Ultima revisión 26/05/2005

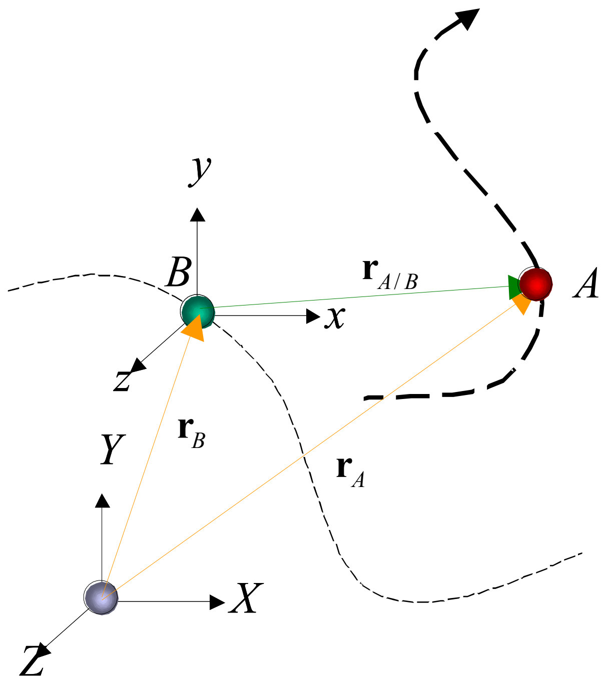
En este documento se presentan uno de los conceptos más importantes de la cinemática, como lo es el del movimiento relativo. Sus aplicaciones van desde el entendimiento de los fenómenos de movimiento a nivel terrestre y espacial hasta su aplicación a la cinemática de cuerpos rígidos.

En las secciones 1 a la 4 se había estudiado el movimiento de partículas utilizando como base un sistema de referencia que se consideraba en reposo. Esta clase de sistemas, denominados como *absolutos* son en la práctica imposibles de encontrar ya que cualquier elemento que deseemos fijar como referencia se encuentra en movimiento. Piense por un momento, usted se encuentra sentado leyendo este documento y podría decir que se encuentra en reposo, pero eso puede decirlo porque está usando como referencia el mueble donde se encuentra sentado. Pero usted no está en reposo y de hecho se encuentra moviéndose a una gran velocidad si tiene encuentra que se encuentra sobre la superficie terrestre y que como todos sabemos esta gira completando una vuelta completa en alrededor de 24 h. A su vez el centro de la tierra da vueltas respecto al Sol, este a su vez se mueve junto con el conjunto local de estrellas dando vueltas alrededor de la Vía Láctea y esta a su vez (si creemos en la Teoría del *Big Bang*) se encuentra alejándose del punto del Universo donde se inició toda esta historia. Esta pequeña observación nos revela una verdad incuestionable "nada es absoluto" y esto aplica con mayor razón a las variables cinemáticas "Todo movimiento es relativo" y en los siguientes apartados encontraremos las expresiones matemáticas que nos permitan encontrar la relación entre sistemas de referencia absolutos y relativos.

2.1. Sistemas de Coordenadas en Traslación

A continuación desarrollaremos una ecuación vectorial que nos permitirá relacionar variables cinemáticas medidas desde un sistema coordenado en movimiento de traslación respecto a un sistema "absoluto". Un sistema de coordenadas en traslación se caracteriza por que sus ejes no cambian de orientación respecto a un sistema de referencia "absoluto" a diferencia de los Sistemas de Coordenadas en Rotación (SCR) que estudiaremos más adelante.

En la siguiente figura se aprecia una partícula A que se mueve siguiendo una trayectoria que podríamos llamar "absoluta" respecto a un observador en el sistema *XYZ*. U su vez el movimiento de esta partícula es seguido desde un observador en el sistema en movimiento *xyz*. Para expresar la posición de la partícula respecto a ambos sistemas se utilizan los vectores $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_{A/B}$ que expresan la posición "absoluta" de A y la relativa de A respecto al observador en B. De igual manera la posición del observador en B se mide respecto al sistema "absoluto" usando el vector $\mathbf{r}_B$. Es importante recordar que las cantidades vectoriales aquí mencionadas son funciones del tiempo y además se aprecia que cumplen la siguiente relación:

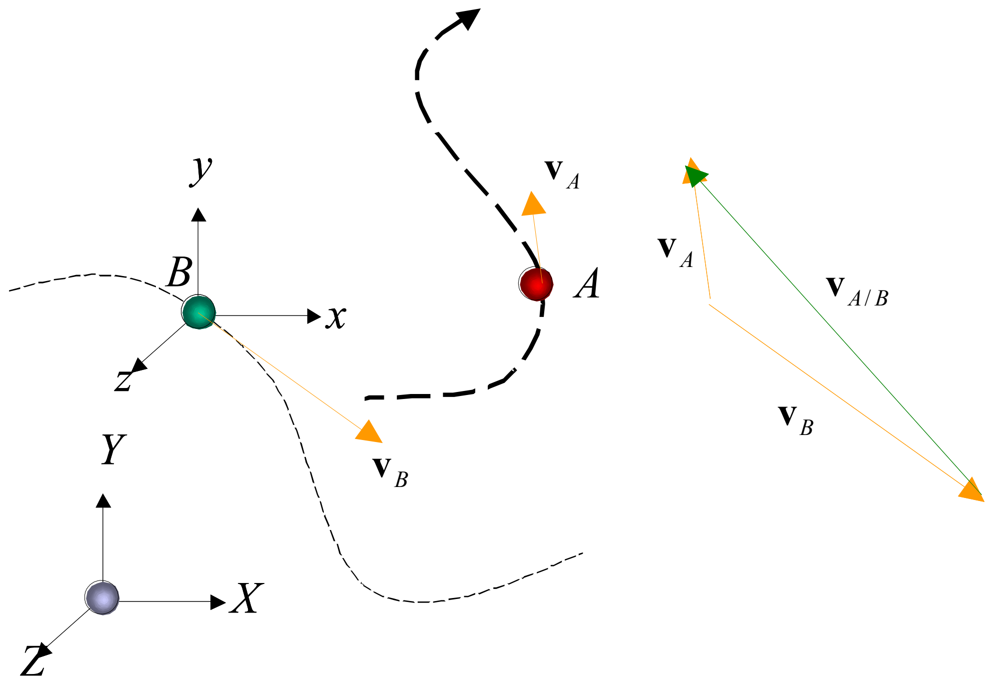


$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} \qquad [2.1]$$

Por lo que sus derivadas cumplirán las siguientes relaciones:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \qquad [2.2]$$

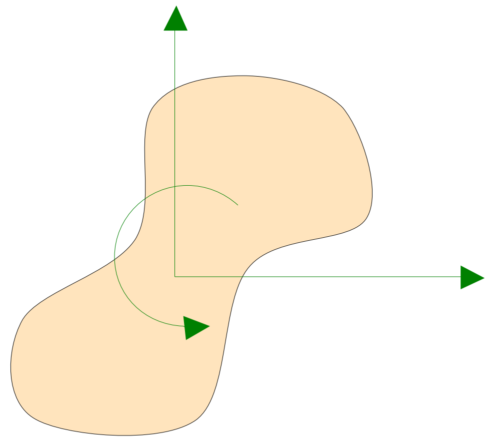
Donde $\mathbf{v}_{A/B} = \dfrac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt}$ lo llamaremos velocidad relativa de A visto desde B.



Observe que la velocidad relativa no es tangente a la trayectoria "absoluta" de la partícula, pero si es tangente al lo que llamaremos *Trayectoria Relativa* o la trayectoria de la particula vista por el observador en movimiento. Vemos que en general la trayectoria relativa y "absoluta" son diferentes pero están relacionadas por el movimiento del observador.

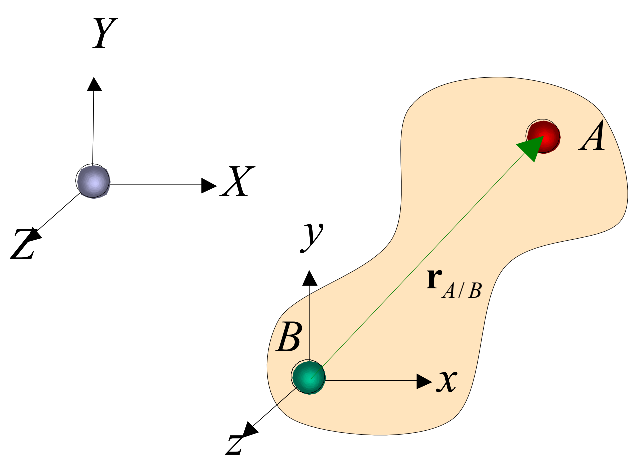
2.2. Aplicación al movimiento bidimensional de cuerpos rígidos

Esta es una de las aplicaciones mas importantes de las ecuaciones de movimiento relativo ya que nos permitirá relacionar variables cinemáticas en dos puntos cualesquiera de un cuerpo rígido. Esto es particularmente útil ya que el movimiento de un cuerpo rígido en el plano puede definirse completamente utilizando dos puntos. Un cuerpo rígido en el plano posee tres grados de libertad como se aprecia en la figura:



Estas corresponden a dos variables de posición (coordenadas de un punto cualquiera del cuerpo) y una variable de orientación (ángulo medido respecto un eje fijo). En la siguiente figura veremos cómo relacionamos las variables cinemáticas con la ecuación 2.1.

Del cuerpo rígido mostrado en la figura anterior hemos escogido dos puntos cualquiera A y B y se tomo como sistema de referencia en movimiento el punto B.



Para los puntos A y B aplica la ecuación 5.1. Pero como nos interesa establecer más que todo relaciones entre velocidades y aceleraciones nos interesa hallar las derivadas:

$$\mathbf{v}_{A/B} = \frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_{A/B} = \frac{d^2\mathbf{r}_{A/B}}{dt^2}$$

Para ello, se hará uso de los vectores unitarios $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ y de sus derivadas. Este par de vectores le añadiremos un tercer vector unitario $\mathbf{e}_3$ paralelo a $\mathbf{k}$ para completar el sistema. Ahora podemos expresar $\mathbf{r}_{A/B}$ en términos de estos vectores unitarios de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_{A/B} = r_{A/B}\mathbf{e}_1 \qquad \textbf{[2.3]}$$

Donde $r_{A/B}$ es constante por tratarse de un cuerpo rígido. Entonces:

$$\mathbf{v}_{A/B} = \frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt} = \frac{d\left(r_{A/B}\mathbf{e}_1\right)}{dt} = r_{A/B}\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = r_{A/B}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_2 \qquad \textbf{[2.4]}$$

Donde $\dot{\theta} = \omega$ lo llamaremos velocidad angular del cuerpo rígido.

Además, el sistema formado por los vectores unitarios $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ es un sistema derecho, por lo que se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned} \qquad \textbf{[2.5]}$$

De estas, aprovecharemos la última relación para expresar *vA/B* en términos de cantiedades vectoriales:

$$\mathbf{v}_{A/B} = r_{A/B}\omega\mathbf{e}_2 = r_{A/B}\omega\left(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1\right) = \omega\mathbf{e}_3 \times r_{A/B}\mathbf{e}_1$$

Lo que puede escribirse como:

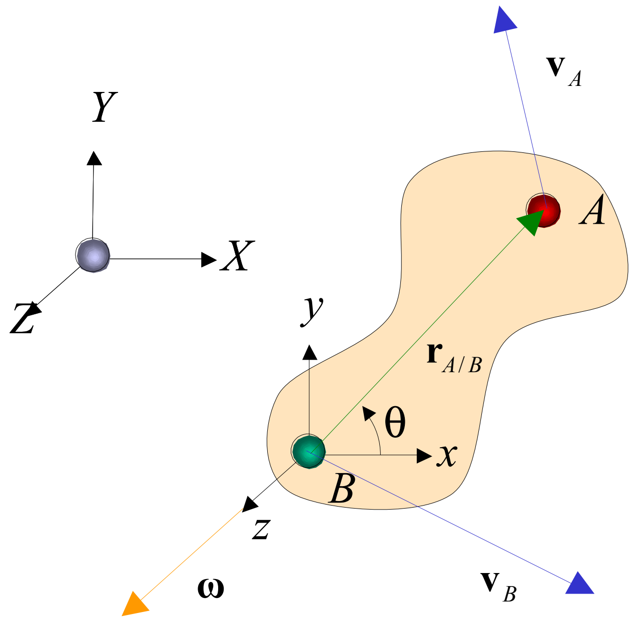
$$\mathbf{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B} \qquad \textbf{[2,6]}$$

Donde vemos que la velocidad angular de un cuerpo rígido es también una cantidad vectorial y el término ω es la magnitud de dicha cantidad.

Por lo anterior, la ecuación 2.2 para un cuerpo rígido puede expresarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B} \qquad \textbf{[2.7]}$$

Se puede esquematizar en la siguiente gráfica donde se aprecia que cuando un cuerpo rígido se mueve en el plano *xy*, su vector velocidad angular queda alineado con el eje *z*.



La velocidad relativa de A visto desde B es un vector perpendicular a la línea que une a A con B.

De acuerdo con la Ecuación 2.8. un cuerpo rígido en el plano puede tener tres tipos de movimientos:

- Traslación Pura: cuando ω es cero en el intervalo de movimiento analizado
- Rotación Pura o rotación con eje fijo. cuando existe un punto B donde $\mathbf{v}_B$ es cero en el intervalo de movimiento analizado
- Movimiento Plano General (MPG): Cuando no se presenta ninguno de los dos casos anteriores.

Una forma de identificar que tipo de movimiento tiene un cuerpo cualquiera es observar las formas de las trayectorias de dos puntos cualesquiera de éste:

- Para un cuerpo en traslación, las trayectorias de dos puntos cualesquiera de éste son idénticas.
- Para un cuerpo en rotación las trayectorias son circulares concéntricas.
- Un cuerpo en MPG las trayectorias son diferentes.