1. Movimientos Conectados

Ultima revisión 26/05/2005

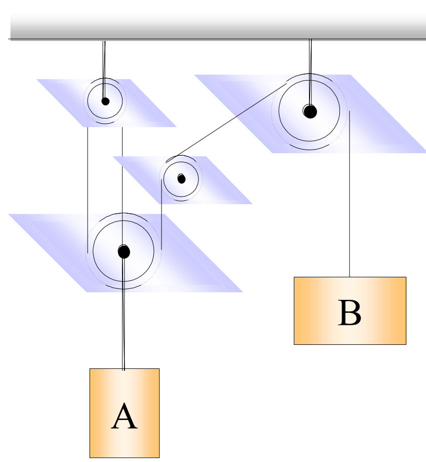
En este documento se muestra como se pueden desarrollar expresiones de posición, velocidad y aceleración para diferentes configuraciones de cuerpos basados en relaciones geométricas.

Es común encontrar en muchos sistemas mecánicos que el movimiento de uno o varios elementos es determinado por el movimiento de uno o varios elementos más. Las restricciones que establecen estas relaciones generalmente pueden representarse matemáticamente usando ecuaciones algebraicas o ecuaciones trigonométricas dependiendo del tipo de sistema a analizar. A continuación veremos los tipos de sistemas que incluiremos dentro de nuestro análisis y que relación se desarrolla para cada uno:

Cables que no cambian de orientación: Ecuaciones algebraicas lineales
Cables que cambian de orientación: Ecuaciones no lineales
Conexiones entre cuerpos rígidos: Ecuaciones trigonométricas

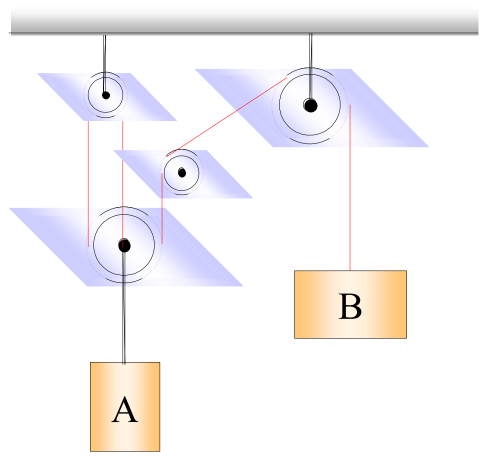
1.1. Sistemas conectados mediante poleas y cables que no cambian de orientación

Un sistema típico se muestra en la figura inferior, en ella se aprecian dos masas A y B que se mueven verticalmente y están conectadas mediante un arreglo de cables y poleas.

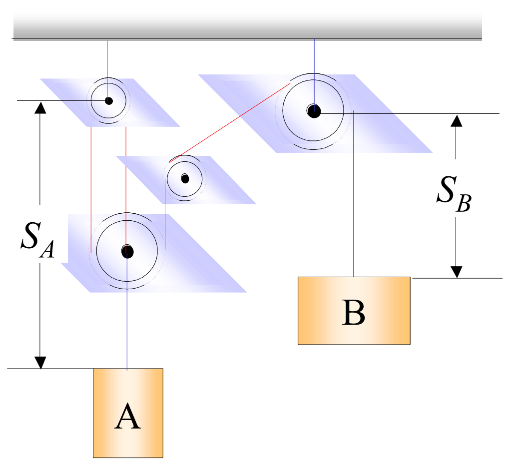


Es claro ver que si se mueva cualquiera de las pesas en una dirección la otra se moverá al mismo tiempo, de tal manera que debe existir una relación entre los movimientos. A continuación se explicará un método para abordar este tipo de problemas:

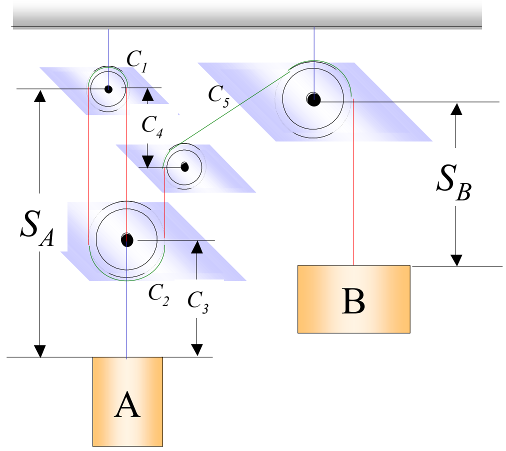
Primero se determina el número de cables que conectan a las masas, esto es necesario cuando hay más de dos masas en movimiento en el sistema. El número de cuerdas determina el número de ecuaciones que se pueden plantear. En la figura inferior se resalta la cuerda que conecta a los dos bloques.



A continuación se establecen variables escalares que determinen la posición de cada elemento móvil, en este caso como el movimiento de cada bloque es en una dimensión se necesita sólo una variable por cada bloque, por lo tanto sólo se requieren dos variables en total. La forma de hacer esto es simplemente establecer una cota entre un punto fijo y un punto del objeto en movimiento o que se mueva a la misma velocidad de éste.



El siguiente paso es expresar la longitud de la cuerda que une a los bloques en función de las cotas y de una serie de constantes que para propósitos ilustrativos se muestran en la figura inferior.



$$L = (S_A - C_3) + C_1 + (S_A - C_3) + C_2 + (S_A - C_3 - C_4) + C_5 + S_B$$

Lo cual puede reorganizarse como:

$$L = 3S_A + S_B + C$$

Donde C representa la suma algebraica de todas las longitudes constantes. Luego consideramos que la cuerda es inextensible (no estira) y derivamos la expresión anterior respecto al tiempo obtendremos:

$$\frac{dL}{dt} = 3\dot{S}_A + \dot{S}_B = 0$$

Como los términos constantes se hacen cero es claro que de aquí en adelante deben armarse las ecuaciones únicamente considerando las cantidades variables.

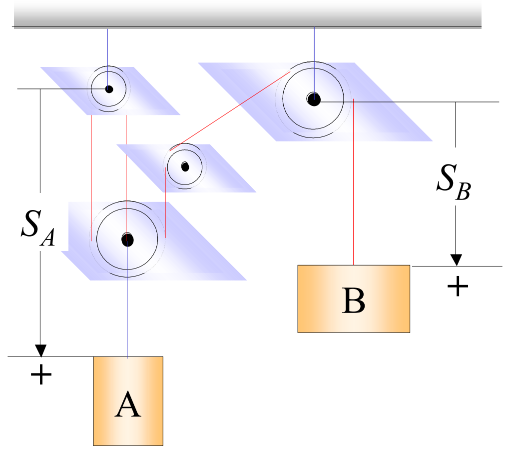
Con esta ecuación obtenemos una relación de velocidades:

$$3v_A + v_B = 0$$

Si derivamos nuevamente obtendremos una relación de aceleraciones:

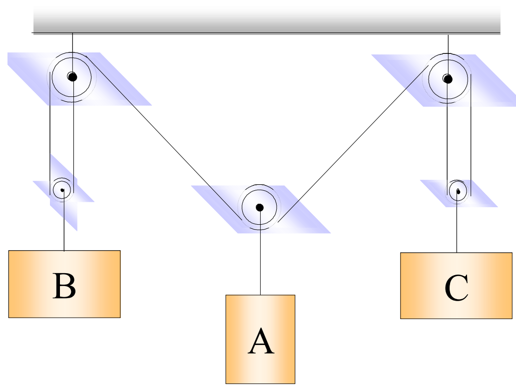
$$3a_A + a_B = 0$$

Es importante resaltar que con este método cada bloque tiene su propio sistema de referencia y la interpretación de los signos depende de la forma como la posición del bloque fue acotada. La dirección positiva es la dirección en que crece la magnitud de la cota.

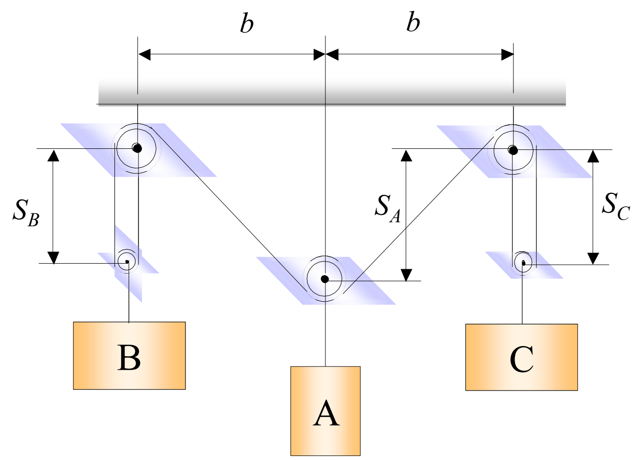


1.2. Cables que cambian de orientación

El método en general es también expresar la longitud del cable o los cables que unen a los cuerpos en movimiento en términos de las variables de posición. Solo que en este caso las expresiones incluyen funciones trigonométricas o expresiones de orden superior (exponente diferente de uno). Como ejemplo ilustrativo se muestra el siguiente conjunto:



En este caso deben acotarse tanto las posiciones (variables) de los bloques como las medidas constantes que definan la longitud de los tramos de cuerda en los segmentos donde hay cambio de dirección, en este caso serán los mostrados abajo.



Es preciso hacer notar que para expresar de una manera simple la longitud de la cuerda, los diámetros de las poleas que conectan las partes de los cables que cambian de orientación deben ser lo suficientemente pequeñas (por lo menos diez veces menor) en comparación con la longitud del mismo como para despreciar su diámetro, lo anterior permite expresar la longitud del cable inclinado en función de la distancia entre centros de las poleas:

$$L = 2S_B + 2\left(S_A^2 + b^2\right)^{1/2} + 2S_C$$

Derivando lo anterior se tiene:

$$2\dot{S}_B + 2S_A\dot{S}_A\left(S_A^2 + b^2\right)^{-1/2} + 2\dot{S}_C = 0$$

Lo cual puede reducirse a:

$$v_B + v_A S_A\left(S_A^2 + b^2\right)^{-1/2} + v_C = 0$$

Esto es básicamente una relación no lineal entre las velocidades de los tres bloques, lo que significa que la velocidad depende de la posición del bloque A en este caso.

Para hallar una relación de aceleraciones se deriva nuevamente:

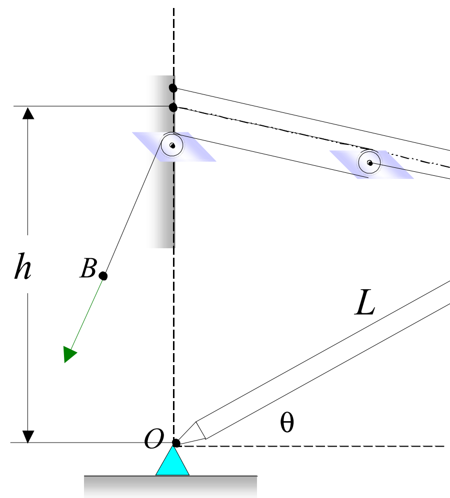
$$a_B + a_A S_A\left(S_A^2 + b^2\right)^{-1/2} - v_A^2 S_A^2\left(S_A^2 + b^2\right)^{-3/2} + v_A^2\left(S_A^2 + b^2\right)^{-1/2} + a_C = 0$$

Lo que muestra que la relación de aceleraciones no sólo depende de la posición sino también de las velocidad de A.

1.3. Cuerpos Rígidos Interconectados

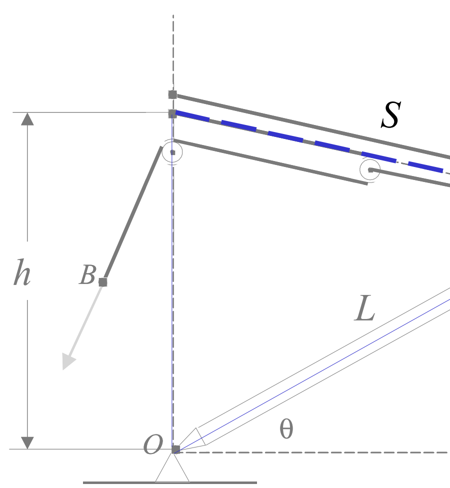
El análisis de esta clase de configuraciones se basa en obtener relaciones geométricas entre las variables lineales que definen desplazamientos de puntos clave o variables angulares que determinan la orientación de un cuerpo en un instante dado. Generalmente en estas relaciones se acude a funciones trigonométricas.

Como ejemplo consideraremos la configuración mostrada en la siguiente figura:



Supóngase que se desea encontrar la variación del ángulo θ que define la orientación del mástil de longitud L en función de la velocidad con la que se hala el cable en B.

La configuración geométrica básica es el triangulo mostrado abajo.



La relación entre las variables S y θ está dada por la Ley del coseno:

$$S^2 = L^2 + h^2 - 2Lh\cos(90 - \theta)$$
$$S^2 = L^2 + h^2 - 2Lh\,\text{sen}\theta$$

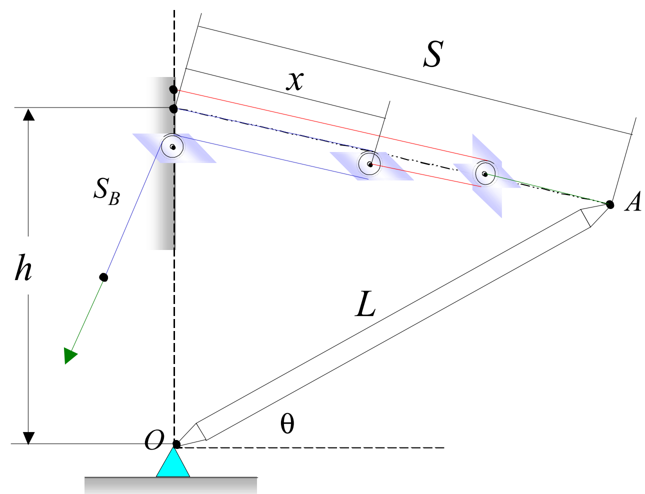
Derivando respecto al tiempo:

$$2S\dot{S} = -2Lh\dot{\theta}\cos\theta$$

por lo que: $\dot{\theta} = -\dfrac{S\dot{S}}{Lh\cos\theta}$

La variable S se puede expresar en virtud de la relación de poleas que se muestra abajo como:

$$L_1 = S_B + 2x$$
$$L_2 = 2S - x$$



Derivando estas dos expresiones y combinándolas se obtiene:

$$\dot{S}_B + 2\dot{x} = 0 \therefore \dot{x} = \frac{\dot{S}_B}{2}$$
$$2\dot{S} - \dot{x} = 0 \therefore \dot{S} = \frac{\dot{S}_B}{4}$$

Por lo que finalmente obtenemos: $\dot{\theta} = -\dfrac{\dot{S}_B\sqrt{L^2 + h^2 - 2Lh\,\text{sen}\theta}}{4Lh\cos\theta}$