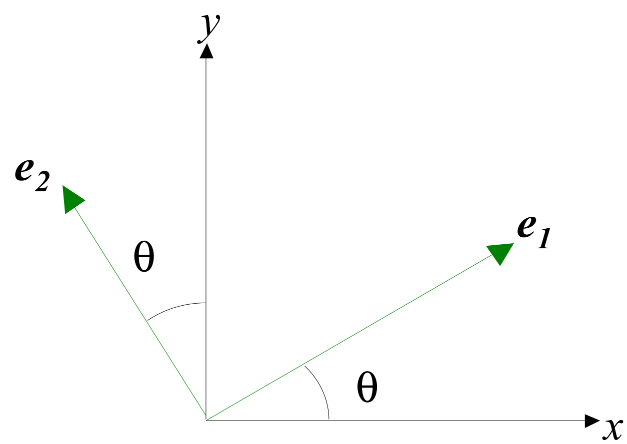
Apendice 1: Derivadas de Vectores Unitarios

Ultima revisión 31/05/2005

Para el desarrollo de las expresiones vectoriales se hace necesario determinar la derivada de vectores unitarios que cambian de dirección, para ello deduciremos estas a partir de la siguiente construccion.



De acuerdo con la figura, los vectores unitarios $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ pueden expresarse en coordenadas rectangulares de la siguiente forma:

$$\mathbf{e}_1 = \cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\theta\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{e}_2 = -\mathrm{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \qquad \textbf{[A1.1]}$$

Derivando respecto al tiempo el primer vector

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \left(-\mathrm{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

Pero $\mathbf{e}_2 = \mathrm{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$ **[A1.2]**

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_2$$

Lo mismo con $\boldsymbol{e}_2$.

$$\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{i} + \mathrm{sen}\theta\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = -(\cos\theta\mathbf{i} + \mathrm{sen}\theta\mathbf{j})\frac{d\theta}{dt}$$

[A1.3]

Pero $\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{i} + \mathrm{sen}\theta\mathbf{j}$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = -\dot{\theta}\mathbf{e}_1$$

Asumiendo que tante e1 como e2 forman parte de un sistema coordenado ortogonal e_1, e_2,e_3, donde se cumple:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$$
$$-\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2$$

Las derivadas anteriores pueden expresarse en forma de producto cruz si definimos la cantidad:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

[A1.4]

del siguiente modo:

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{e}_1$$

[A1.5]

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{e}_2$$